Proposition

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$. On suppose que, pour tout $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$, $P(X=x)\neq 0$ et $P(Y=y)\neq 0$. Alors

(i) $\forall (x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$

$$P((X=x)\cap(Y=y)) = P(X=x\mid Y=y)\,P(Y=y) = P(Y=y\mid X=x)\,P(X=x)$$

(ii) $\forall x\in X(\Omega)$ $$P(X=x)=\sum_{y\in Y(\Omega)} P(X=x\mid Y=y)\,P(Y=y)$$

(iii) $\forall y\in Y(\Omega)$ $$P(Y=y)=\sum_{x\in X(\Omega)} P(Y=y\mid X=x)\,P(X=x)$$

□ (i) définitions

(ii) et (iii) formule des probabilités totales avec les systèmes complets d'événements $((X=x))_{x\in X(\Omega)}$ et $((Y=y))_{y\in Y(\Omega)}$. □

Définition Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. On dit que X et Y sont <u>indépendantes</u> lorsque pour tout $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$, $(X=x)$ et $(Y=y)$ sont deux événements indépendants, i.e.

$$P((X=x)\cap(Y=y)) = P(X=x)\,P(Y=y)$$

Proposition

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ à valeurs dans E et F respectivement. Alors pour toutes parties A de E et B de F, les événements $(X\in A)$ et $(Y\in B)$ sont indépendants i.e.

$$P((X\in A)\cap(Y\in B)) = P(X\in A)\,P(Y\in B)$$

□ Soient $A \subset E$ et $B \subset F$. Notons $A' = A \cap X(\Omega)$ et $B' = B \cap Y(\Omega)$.
$X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ étant au plus dénombrables, A' et B' sont au plus dénombrables.

$$(X \in A) = (X \in A') = \bigcup_{x \in A'} (X = x)$$

$$(Y \in B) = (Y \in B') = \bigcup_{y \in B'} (Y = y)$$

$$(X \in A) \cap (Y \in B) = \bigcup_{(x,y) \in A' \times B'} (X = x) \cap (Y = y)$$

Il s'agit d'une union au plus dénombrable d'événements deux à deux incompatibles

$$P\big((X \in A) \cap (Y \in B)\big) = \sum_{(x,y) \in A' \times B'} P\big((X = x) \cap (Y = y)\big)$$

$$= \sum_{(x,y) \in A' \times B'} P(X = x)\, P(Y = y) \quad \text{sommation par paquets}$$

$$= \underbrace{\Big(\sum_{x \in A'} P(X = x)\Big)}_{P(X \in A)} \underbrace{\Big(\sum_{y \in B'} P(Y = y)\Big)}_{P(Y \in B)}$$

$$P\big((X \in A) \cap (Y \in B)\big) = P(X \in A)\, P(Y \in B) \quad \square$$

Proposition

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit f une application définie sur $X(\Omega)$ et soit g une application définie sur $Y(\Omega)$. Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

□ $f(X)$ et $g(Y)$ sont deux variables aléatoires discrètes.
Soit $(x, y) \in f(X)(\Omega) \times g(Y)(\Omega)$.

$$P\big((f(X) = x) \cap (g(Y) = y)\big) = P\big((X \in f^{-1}(\{x\})) \cap (Y \in g^{-1}(\{y\}))\big)$$

proposition précédente ↳

$$= P(X \in f^{-1}(\{x\}))\, P(Y \in g^{-1}(\{y\}))$$

$$= P(f(X) = x)\, P(g(Y) = y) \quad \square$$